Po odjęciu stronami równań (7.1) otrzymuje się

$$\mathbf{K}_T\left(\Delta\mathbf{q}_2-\Delta\mathbf{q}_1\right)=\mathbf{K}_T\cdot\psi=0. \tag{7.1a}$$

Statycznym kryterium stanu krytycznego jest warunek

$$\det\mathbf{K}_T=0. \tag{7.2}$$

Sformułowanie zagadnienia własnego w odniesieniu do parametru obciążenia $\lambda$ prowadzi do równania stateczności

$$[\mathbf{K}_0+\lambda\cdot(\mathbf{K}_\sigma^*+\mathbf{K}_{u1}^*)+\lambda^2\cdot\mathbf{K}_{u2}^*]\cdot\psi=0, \tag{7.3}$$

gdzie $\mathbf{K}_{u1}$ oraz $\mathbf{K}_{u2}$ – części liniowa i kwadratowa macierzy sztywności przemieszczeniowej; gwiazdki przy macierzach oznaczają, że ich składniki zostały obliczone dla obciążenia $\mathbf{P}^*$.

Powyższe równanie opisuje tzw. kwadratowe zagadnienie własne, które jest kłopotliwe do rozwiązania. W algorytmach programów komputerowych zostaje ono zlinearyzowane przez pominięcie członu kwadratowego. Prowadzi to do tzw. stateczności zlinearyzowanej

$$[\mathbf{K}_0+\lambda\cdot(\mathbf{K}_\sigma^*+\mathbf{K}_{u1}^*)]\cdot\psi=0. \tag{7.3a}$$

Jeżeli ponadto zostanie pominięta macierz $\mathbf{K}_{u1}$, to otrzymuje się najczęściej formułowane w literaturze równanie stateczności początkowej (pkt 7.1.2). W przypadku wyboru opcji liniowej analizy wyboczeniowej (LBA) program zwykle rozwiązuje zagadnienie stateczności początkowej. W pracach [33] i [78] zarówno zagadnienie stateczności początkowej, jak i zlinearyzowanej w opisany wyżej sposób zaliczono do analiz liniowych. Macierze w równaniach mogą się różnić w zależności od rodzaju zastosowanego elementu skończonego. W zależności od przyjętych uproszczeń przy formułowaniu zagadnienia własnego oraz zastosowanych funkcji kształtu/macierzy elementu skończonego rezultaty MES mogą znacznie różnić się od ścisłych wyników metod analitycznych (przykł. 7.2 i 7.4).

Niektóre programy pozwalają na szacowanie wartości własnych na podstawie analizy modalnej modelu nieobciążonego siłami zewnętrznymi i wykorzystują w tym celu również zagadnienie własne. Zgodnie z instrukcjami programów, na przykład z instrukcją [M8], analiza modalna służy głównie do poszukiwania błędów w modelach niestabilnych. Kryterium wystąpienia niestateczności jest w tym przypadku dążenie do zera pierwszej częstości drgań własnych [77].

### 7.1.2. Liniowa analiza wyboczeniowa (LBA), mnożnik obciążenia krytycznego

W najczęściej stosowanej liniowej analizie wyboczeniowej (LBA, ang. *Linear Buckling Analysis*, *Linear Bifurcation Analysis*) układ traktuje się jako idealny, uwzględnia się tylko siły osiowe i poszukuje informacji, ile razy należy zmniejszyć lub zwiększyć zadane obciążenie, aby osiągnąć punkt bifurkacji (rozdwojenia stanu równowagi).

Równanie równowagi układu przyjmuje się w postaci [33]

$$(\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_G) \cdot \mathbf{q} = \mathbf{P}, \tag{7.4}$$

gdzie:
$\mathbf{K}_L$ – macierz sztywności sprężystej;
$\mathbf{K}_G$ – macierz sztywności geometrycznej; w analizie LBA równa macierzy sztywności naprężeniowej $\mathbf{K}_\sigma$, związana z pracą sił osiowych stanu bezgiętnego na przemieszczeniach pobifurkacyjnych [79];
$\mathbf{q}$ – wektor przemieszczeń przywęzłowych.

Jeżeli przyjąć, że $\mathbf{P} = \lambda \cdot \mathbf{P}^*$, gdzie $\mathbf{P}^*$ jest wektorem obciążenia początkowego, to równanie (7.4) można zapisać w postaci

$$(\mathbf{K}_L + \lambda \cdot \mathbf{K}_G^*) \cdot \mathbf{q} = \lambda \cdot \mathbf{P}^*. \tag{7.4a}$$

Poszukuje się parametrów $\lambda$, dla których możliwe są dwa rozwiązania układu równań, czyli w interpretacji fizycznej możliwe są dwie postacie równowagi układu idealnego (tzn. o prętach prostych, obciążonego siłami osiowymi). Rozwiązanie to jest możliwe jedynie wtedy, gdy [33], [40], [78]

$$\det(\mathbf{K}_L + \lambda \cdot \mathbf{K}_G^*) = 0. \tag{7.5}$$

Wyznacznik ten jest wielomianem o stopniu zależnym od liczby stopni swobody. Przykładowo, dla pręta ściskanego, swobodnie podpartego, bez węzłów pośrednich uzyska się w każdej płaszczyźnie głównej tylko dwie wartości własne, które są wyświetlane na ekranie komputera jako mnożniki obciążenia krytycznego albo współczynniki krytyczne. W różnych programach stosuje się różne oznaczenia, na przykład $f$ [M8], [M9], $\alpha_{cr}$ [M5], a niekiedy nie stosuje się symbolu literowego [M4]. Najmniejsza wartość własna $\lambda = \lambda_{\min}$ jest nazywana w Eurokodzie mnożnikiem obciążenia krytycznego i oznaczana jako $\alpha_{cr}$.

Dla uzyskanych wartości własnych są obliczane odpowiadające im wektory własne (normalizowane w różny sposób), które w połączeniu z funkcjami